**Санкт-Петербургский государственный университет**

**Р А Б О Ч А Я П Р О Г Р А М М А**

**УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ**

Теория случайных процессов

Stochastic Process Theory

**Язык(и) обучения**

русский

Трудоемкость в зачетных единицах: 2

Регистрационный номер рабочей программы: 001257

**Раздел 1. Характеристики учебных занятий**

**1.1. Цели и задачи учебных занятий**

Цель изучения дисциплины: обучение обучающихся основам теории случайных процессов, используемым в математическом моделировании и анализе сложных стохастических систем.

Задачи курса: изучение важнейших примеров, основных понятий и результатов теории случайных процессов, используемых в анализе стохастических систем.

**1.2. Требования подготовленности обучающегося к освоению содержания учебных занятий (пререквизиты)**

«Дополнительные главы теории случайных процессов»: знать содержание дисциплины и иметь достаточно полное представление о возможностях применения ее разделов в различных прикладных областях науки и техники; знать основные типы случайных процессов, владеть основами спектральной теории процессов и стохастического интегрирования; владеть многообразием предельных теорем для случайных процессов и уметь применять их к моделям практических систем.

**1.3. Перечень результатов обучения (learning outcomes)**

Дисциплина является одним из фундаментальных элементов образования в области теории вероятностей, непосредственно подводящей к решению практических задач, стоящих перед дипломированными специалистами (специальность «математика»).

**1.4. Перечень и объём активных и интерактивных форм учебных занятий**

Активных и интерактивных форм учебных занятий – 2 часа.

**Раздел 2. Организация, структура и содержание учебных занятий**

**2.1. Организация учебных занятий**

**2.1.1 Основной курс**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Трудоёмкость, объёмы учебной работы и наполняемость групп обучающихся | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Код модуля в составе дисциплины,  практики и т.п. | Контактная работа обучающихся с преподавателем | | | | | | | | | | | | Самостоятельная работа | | | | Объём активных и интерактивных  форм учебных занятий | Трудоёмкость |
| лекции | семинары | консультации | практические  занятия | лабораторные работы | контрольные работы | коллоквиумы | текущий контроль | промежуточная  аттестация | итоговая аттестация | под руководством преподавателя | в присутствии  преподавателя | сам. раб. с использованием  методических материалов | текущий контроль (сам.раб.) | промежуточная аттестация (сам.раб.) | итоговая аттестация  (сам.раб.) |
| ОСНОВНАЯ ТРАЕКТОРИЯ | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Форма обучения: очная | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Семестр 7 | 30 |  | 2 |  |  |  |  |  | 2 |  |  |  | 10 |  | 28 |  | 2 | 2 |
|  | 2-100 |  | 2-100 |  |  |  |  |  | 2-100 |  |  |  | 1-1 |  | 1-1 |  |  |  |
| ИТОГО | 30 |  | 2 |  |  |  |  |  | 2 |  |  |  | 10 |  | 28 |  |  | 2 |

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Виды, формы и сроки текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации | | | | | | |
| Код модуля в составе дисциплины, практики и т.п. | Формы текущего контроля успеваемости | | Виды промежуточной аттестации | | Виды итоговой аттестации  (только для программ итоговой аттестации и дополнительных образовательных программ) | |
| Формы | Сроки | Виды | Сроки | Виды | Сроки |
| ОСНОВНАЯ ТРАЕКТОРИЯ | | | | | | |
| Форма обучения: очная | | | | | | |
| Семестр 7 |  |  | экзамен, устно, традиционная форма | по графику промежуточной аттестации |  |  |

**2.2. Структура и содержание учебных занятий**

Содержание разделов дисциплины и виды занятий

1. Основные типы случайных процессов:

Стационарные процессы, процессы со стационарными приращениями, процессы с независимыми приращениями.

2. Гауссовские случайные процессы:

Определение. Математическое ожидание и ковариационная функция как элементы, определяющие конечномерные распределения процесса. Примеры гауссовских случайных процессов. Винеровский процесс и его свойства (независимость и однородность приращений, самоподобие). Броуновский мост и его связь с винеровским процессом. Поле Винера-Ченцова (броуновский лист). Броуновская функция Леви. Дробное броуновское движение. Процесс Орнштейна-Уленбека.

3. Случайные меры и стохастические интегралы:

Определение меры с некоррелированными значениями и интеграла по ней. Простейшие свойства интеграла. Изометрическое свойство интеграла. Комплексные меры. Меры с независимыми значениями. Гауссовский белый шум. Пуассоновские меры. Выражение основных гауссовских процессов (винеровский процесс, броуновский мост, броуновский лист, броуновская функция Леви, дробное броуновское движение, процесс Орнштейна-Уленбека) в виде интегралов по белому шуму.

4. Стационарные процессы и их спектральные представления:

Стационарный процесс в широком смысле. Спектральное представление, спесктральная мера, спектральная плотность. Связь корреляционной функции и спектральной меры. Спектральный критерий дифференцируемости и спектральное представление производной. Закон больших чисел. Спектр процесса Орнштейна-Уленбека. Процесс с двухточечным спектром. Особенности спектрального представления вещественного процесса.

5. Линейные преобразования случайных процессов и последовательностей: :

Усиление, ускорение, задержка, простое и кратное дифференцирование, интегральное преобразование. Переходная и передаточная функция. Композиция интегральных преобразований. Физически реализуемые преобразования. Примеры: идеальный фильтр, интегрирующая цепь, авторегрессионная последовательность и её обобщения.

6. Прогнозирование стационарных последовательностей:

Понятие линейного прогноза. Ошибка прогноза. Регулярные и сингулярные процессы. Примеры таких процессов. Аналитическая интерпретация задачи прогнозирования. Различные пространства функций, связанные с понятиями "прошлого" и "будущего". Достаточные условия построения прогноза. Построение прогноза в случае факторизуемой спектральной плотности. Примеры таких плотностей и прогнозов, в том числе для авторегрессионной последовательности. Вычисление ошибки прогноза. Построение факторизации спектральной плотности при помощи разложения логарифма в ряд Фурье. Определение ошибки прогноза на один шаг в общем случае. Рациональные спектральные плотности. Приведение их к каноническому виду, факторизация и построение прогноза. Примеры решения задач прогноза.

7.Сложные пуассоновские случайные величины и их пределы:

Сложные пуассоновские величины с конечным спектром. Величины общего вида. Метод их построения как суммы случайного числа н.о.р. величин. Выражение математического ожидания, дисперсии, характеристической функции через спектр. Безграничная делимость. Центрирование. Предельные переходы к безгранично делимым величинам общего вида: без центрирования, с центрированием, с частичным центрированием. Условие Леви-Хинчина для спектральных мер. Триплет, характеризующий безгранично делимое распределение.

8. Устойчивые случайные величины и процессы:

Определение, спектральное представление, параметризация семейства устойчивых величин. Строгая устойчивость. Устойчивость нормального закона. Представление Леви-Хинчина устойчивого распределения. Симметричные и односторонние устойчивые законы. Явная формула характеристической функции устойчивого закона.

Хвосты и моментные свойства устойчивых распределений. Устойчивые меры с независимыми значениями и интегралы по ним. Однородные процессы с независимыми приращениями. Определение. Формула для характеристической функции. Представление через интеграл по пуассоновской мере. Устойчивые процессы с независимыми приращениями. Пример: процесс времени выхода винеровского процесса на заданный уровень (устойчивый субординатор). Субординаторы общего вида как процессы времени выхода устойчивых процессов с независимыми приращениями. Устойчивые процессы общего вида.

9. Сходимость процессов:

Сходимость конечномерных распределений. Определения слабой сходимости процессов и их эквивалентность.Связь между слабой сходимостью и сходимостью КМР. Примеры сходимости процессов: принцип инвариантности, сходимость эмпирических процессов, сходимость нормированной траектории инерционной частицы. Плотность семейства распределений. Теорема Прохорова об эквивалентности относительной компактности и плотности. Достаточное условие плотности (аналог теоремы Арцела-Асколи). Теорема о необходимых и достаточных условиях слабой сходимости процессов в C[0,1]. Моментное условие плотности семейства мер в C[0,1]. Принцип инвариантности в C[0,1]. Примеры непрерывных функционалов и предельная теорема для них. Принцип отражения. Предельная теорема для распределения максимума случайного блуждания. Распределение времени первого выхода для винеровского процесса. Разрывные функционалы: момент выхода и время пребывания. Предельная теорема для разрывных функционалов. Предельная теорема для момента выхода. Закон арксинуса.

**Раздел 3. Обеспечение учебных занятий**

**3.1. Методическое обеспечение**

**3.1.1 Методические указания по освоению дисциплины**

Посещение лекций.

**3.1.2 Методическое обеспечение самостоятельной работы**

Использование основной и дополнительной литературы.

**3.1.3 Методика проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации и критерии оценивания**

В течение учебного курса по дисциплине проводятся аудиторные контрольные работы, задаются задачи и упражнения для самостоятельной работы. В процессе обучения каждый обучающийся снабжается набором задач, которые необходимо уметь решать для положительной оценки по аттестации.

Методика проведения экзамена

Экзамен проводится в устной форме. Билет состоит из двух вопросов. Время подготовки ответа на вопросы билета составляет 60 минут.

Использование конспектов и учебников, а также электронных устройств хранения, обработки или передачи информации при подготовке и ответе на вопросы экзамена категорически запрещено. В случае обнаружения факта использования недозволенных материалов (устройств) составляется акт и студент удаляется с экзамена. После ответа на вопросы билета преподаватель задает несколько дополнительных вопросов, на основании оценки ответов на которые итоговая оценка по предмету может быть повышена или понижена.

Критерии выставления оценок

Оценка «отлично» ставится за полностью раскрытый теоретический материал и правильные ответы на дополнительные вопросы преподавателя. В болонской шкале оценка может быть скорректирована в ту или иную сторону с учетом малозначительных погрешностей изложения или, напротив, углубленного изложения материала.

Оценка «хорошо» ставится за изложенный теоретический материал билета (возможно с помощью наводящих подсказок преподавателя).

Оценка «удовлетворительно» ставится за знание основных вопросов по каждой теме.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется, если не выполняются условия для получения оценок «отлично», «хорошо» и «удовлетворительно».

**3.1.4 Методические материалы для проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации (контрольно-измерительные материалы, оценочные средства)**

1. Основные типы случайных процессов.

2. Гауссовские случайные процессы.

3. Случайные меры и стохастические интегралы.

4. Гауссовский белый шум и пуассоновские меры.

5. Стационарные процессы.

6. Спектральное представление, спектральная мера.

7. Закон больших чисел для стационарных процессов.

8. Особенности спектрального представления вещественного процесса.

9. Линейные преобразования случайных процессов и последовательностей.

10. Переходная и передаточная функция.

11. Композиция интегральных преобразований.

12. Идеальный фильтр и интегрирующая цепь,

13. Авторегрессионная последовательность и её обобщения.

14. Понятие линейного прогноза.

15. Аналитическая интерпретация задачи прогнозирования.

16. Достаточные условия построения прогноза.

17. Построение прогноза в случае факторизуемой спектральной плотности.

18. Построение факторизации спектральной плотности при помощи разложения логарифма в ряд Фурье.

19. Определение ошибки прогноза на один шаг в общем случае.

20. Рациональные спектральные плотности. Приведение их к каноническому виду, факторизация и построение прогноза.

21. Сложные пуассоновские случайные величины и их пределы.

22. Определение, спектральное представление, параметризация семейства устойчивых величин.

23. Представление Леви-Хинчина устойчивого распределения.

24. Явная формула характеристической функции устойчивого закона.

25. Устойчивые меры с независимыми значениями и интегралы по ним.

26.Однородные процессы с независимыми приращениями.

27. Устойчивые процессы с независимыми приращениями.

28. Субординаторы.

29. Устойчивые процессы общего вида.

30. Предельная теорема о сходимости к устойчивым распределениям. 31.Устойчивость предела сумм н.о.р. случайных величин.

32. Сходимость конечномерных распределений.

33. Определения слабой сходимости процессов и их эквивалентность.

34. Плотность семейства распределений. Теорема Прохорова.

35. Достаточное условие плотности (аналог теоремы Арцела-Асколи).

36. Теорема о необходимых и достаточных условиях слабой сходимости процессов в C[0,1].

37. Моментное условие плотности семейства мер в C[0,1].

38. Принцип инвариантности в C[0,1].

39. Принцип отражения. Предельная теорема для распределения максимума случайного блуждания.

40. Распределение времени первого выхода для винеровского процесса.

41. Предельная теорема для разрывных функционалов.

42. Закон арксинуса.

**3.1.5 Методические материалы для оценки обучающимися содержания и качества учебного процесса**

Оценка обучающимися содержания и качества учебного процесса по дисциплине осуществляется в установленном в СПбГУ порядке.

**3.2. Кадровое обеспечение**

**3.2.1 Образование и (или) квалификация штатных преподавателей и иных лиц, допущенных к проведению учебных занятий**

К чтению лекций должны привлекаться преподаватели, имеющие ученую степень доктора или кандидата наук (в том числе степень PhD, прошедшую установленную процедуру признания и установления эквивалентности) и/или ученое звание профессора или доцента.

**3.2.2 Обеспечение учебно-вспомогательным и (или) иным персоналом**

Не требуется.

**3.3. Материально-техническое обеспечение**

**3.3.1 Характеристики аудиторий (помещений, мест) для проведения занятий**

Стандартно оборудованные лекционные аудитории, должны вмещать поток в соответствии со списком обучающихся.

**3.3.2 Характеристики аудиторного оборудования, в том числе неспециализированного компьютерного оборудования и программного обеспечения общего пользования**

Доска для письма мелом или фломастером.

**3.3.3 Характеристики специализированного оборудования**

Не требуется.

**3.3.4 Характеристики специализированного программного обеспечения**

Не требуется.

**3.3.5 Перечень и объёмы требуемых расходных материалов**

Мел — не менее 1 куска на час лекционных занятий, фломастеры для доски, губка.

**3.4. Информационное обеспечение**

**3.4.1 Список обязательной литературы**

1. П. Биллингсли. Сходимость вероятностных мер. М.: Наука, 1977.

2. А.В. Булинский, А.Н. Ширяев. Теория случайных процессов. М. Физматлит, 2003.

3. А.Д. Вентцель. Курс теории случайных процессов. Наука (Физматлит), издания 1975 и 1996.

**3.4.2 Список дополнительной литературы**

1. Ибрагимов И.А., Линник Ю.В. Независимые и стационарно связанные случайные величины. Наука, 1965.

2. Золотарёв В.М. Одномерные устойчивые распределения. Наука, 1983.

3. М.А. Лифшиц. Устойчивые распределения, случайные величины и процессы. СПбГУ, 2007.

4. М.А. Лифшиц. Гауссовские случайные функции. ТВиМС, 1996.

**3.4.3 Перечень иных информационных источников**

Не требуется.

**Раздел 4. Разработчики программы**

Лифшиц М.А., профессор, докт. физ.-мат. наук.

Никитин Я.Ю., профессор, докт. физ.-мат. наук.